Análisis Complejo: 1.2 Productos infinitos

Presentaciones de clase

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

Objetivos

Objetivos

Objetivos

Objetivos

- Demostrar que dado un conjunto discreto $M \subset \mathbb{C}$ existe una función entera con ceros sólo en M y multiplicidades prescritas.

Objetivos

Objetivos

- Demostrar que dado un conjunto discreto $M \subset \mathbb{C}$ existe una función entera con ceros sólo en M y multiplicidades prescritas.
- Demostrar que cada función entera se factoriza en función de sus ceros.

Objetivos

Objetivos

- Demostrar que dado un conjunto discreto $M \subset \mathbb{C}$ existe una función entera con ceros sólo en M y multiplicidades prescritas.
- Demostrar que cada función entera se factoriza en función de sus ceros.
- Encontrar la factorización de funciones clásicas.

Productos infinitos de números complejos

Definición

Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que:

- el producto $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ es estríctamente convergente si existe $\lim_m \prod_{j=1}^{m} a_j = u \neq 0$. Definimos

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j := u.$$

- el producto $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ es convergente si para algún $m \in \mathbb{N}$ el producto infinito $\prod_{j=m+1}^{\infty} a_j$ es estrictamente convergente. En este caso el valor el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 a_2 \dots a_m [\prod_{n=m+1}^{\infty} a_n],$$

donde el valor $\prod_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ha sido definido como antes.

Primeras propiedades de los productos infinitos

Proposición

Si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces se cumple:

Primeras propiedades de los productos infinitos

Proposición

Si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces se cumple:

i) Para cada $n \geq 1$ el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k =: \rho_n$ converge, y se verifica

$$a_1 a_2 \ldots a_n \rho_n = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

Primeras propiedades de los productos infinitos

Proposición

Si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces se cumple:

i) Para cada $n \geq 1$ el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k =: \rho_n$ converge, y se verifica

$$a_1 a_2 \dots a_n \rho_n = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

ii) $\lim_n \rho_n = 1$ y $\lim_n a_n = 1$

Primeras propiedades de los productos infinitos

Proposición

Si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces se cumple:

i) Para cada $n \geq 1$ el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k =: \rho_n$ converge, y se verifica

$$a_1 a_2 \dots a_n \rho_n = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

ii) $\lim_n \rho_n = 1$ y $\lim_n a_n = 1$

Proposición

Una condición necesaria y suficiente para que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ sea estríctamente convergente es que $1 + a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que la serie $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Log}\,(1 + a_n)$ sea convergente.

Productos infinitos absolutamente convergentes

16/Octubre/2006

Proposición

Dado un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ son equivalentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty$;

ii) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n\geq m}|Log(1+a_n)| < +\infty$;

iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge.

Cada una de estas condiciones implica que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es convergente.

Productos infinitos absolutamente convergentes

16/Octubre/2006

Proposición

Dado un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ son equivalentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty$;

ii) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \geq m}|Log(1+a_n)| < +\infty$;

iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge.

Cada una de estas condiciones implica que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es convergente.

Definición

El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ se dice que es absolutamente convergente cuando se cumple alguna de las tres condiciones equivalentes de la proposición anterior.

Productos uniformemente convergentes

Definición

Sea K un conjunto y $u_n : K \to \mathbb{C}$, una sucesión de funciones.

Productos uniformemente convergentes

Definición

Sea K un conjunto y $u_n : K \to \mathbb{C}$, una sucesión de funciones.

i) Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge para cada $z \in K$ se dice que el producto infinito converge puntualmente en K.

Productos uniformemente convergentes

Definición

Sea K un conjunto y $u_n : K \to \mathbb{C}$, una sucesión de funciones.

i) Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge para cada $z \in K$ se dice que el producto infinito converge puntualmente en K.

ii) Si además la sucesión $\rho_n(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty} u_j(z)$ converge uniformemente sobre K hacia 1 se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente sobre K.

Caracterización productos uniforme y absolutamente convergentes

Proposición

Sea K un conjunto y $a_n : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

Caracterización productos uniforme y absolutamente convergentes

Proposición

Sea K un conjunto y $a_n : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$ converge uniformemente para $z \in K$;

Caracterización productos uniforme y absolutamente convergentes

Proposición

Sea K un conjunto y $a_n : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$ converge uniformemente para $z \in K$;

ii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n(z)|)$ converge uniformemente para $z \in K$

Caracterización productos uniforme y absolutamente convergentes

Proposición

Sea K un conjunto y $a_n : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$ converge uniformemente para $z \in K$;

ii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n(z)|)$ converge uniformemente para $z \in K$

Cualquiera de las condiciones anteriores implica que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n(z))$$

converge uniformemente para $z \in K$.

Productos uniformemente convergentes funciones continuas

Proposición

Sea K un espacio compacto y $u_j : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

Productos uniformemente convergentes funciones continuas

Proposición

Sea K un espacio compacto y $u_j : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\prod_{j=1}^{\infty} u_j$ converge uniformemente sobre K.

Productos uniformemente convergentes funciones continuas

Proposición

Sea K un espacio compacto y $u_j : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\prod_{j=1}^{\infty} u_j$ converge uniformemente sobre K.

ii) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{j=m}^{\infty} u_j(z) \neq 0$ para cada $z \in K$ y $\prod_{j=m}^{n} u_j$ converge uniformemente sobre K hacia $\prod_{j=m}^{\infty} u_j$ cuando $n \to \infty$.

17/Octubre/2006: Prod. infinitos funciones holomorfas

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es un producto infinito de funciones continuas $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces:

17/Octubre/2006: Prod. infinitos funciones holomorfas

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es un producto infinito de funciones continuas $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces:

i) la sucesión de los productos parciales $\pi_n = f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia f;

17/Octubre/2006: Prod. infinitos funciones holomorfas

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es un producto infinito de funciones continuas $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces:

i) la sucesión de los productos parciales $\pi_n = f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia f;

ii) f es continua;

17/Octubre/2006: Prod. infinitos funciones holomorfas

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es un producto infinito de funciones continuas $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces:

i) la sucesión de los productos parciales $\pi_n = f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia f;

ii) f es continua;

iii) para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $Z(f_n) \bigcap K = \Phi$.

17/Octubre/2006: Prod. infinitos funciones holomorfas

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es un producto infinito de funciones continuas $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces:

i) la sucesión de los productos parciales $\pi_n = f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia f;

ii) f es continua;

iii) para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $Z(f_n) \bigcap K = \Phi$.

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$. Decimos que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de Ω, si $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Prod. infinitos funciones holomorfas

Observación

- Una condición suficiente para que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converja uniformemente sobre compactos de Ω es que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$$

sea uniformemente convergente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Prod. infinitos funciones holomorfas

Observación

- Una condición suficiente para que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converja uniformemente sobre compactos de Ω es que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$$

sea uniformemente convergente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Ejercicio

Pruébese que se tiene

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z},$$

para cada $|z| < 1$, donde el producto infinito converge uniformemente sobre compactos del disco unidad.

Prod. infinitos funciones holomorfas

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ tal que el producto $f := \prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de Ω. Entonces:

Prod. infinitos funciones holomorfas

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ tal que el producto $f := \prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de Ω. Entonces:

i) La función definida por el producto $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), z \in \Omega$, es holomorfa en Ω;

Prod. infinitos funciones holomorfas

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ tal que el producto $f := \prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de Ω. Entonces:

i) La función definida por el producto $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), z \in \Omega$, es holomorfa en Ω;

ii) $\mathscr{Z}(f) = U_n \mathscr{Z}(f_n)$.

Prod. infinitos funciones holomorfas

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ tal que el producto $f := \prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de Ω. Entonces:

i) La función definida por el producto $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), z \in \Omega$, es holomorfa en Ω;

ii) $\mathscr{Z}(f) = U_n \mathscr{Z}(f_n)$.

iii) si $\mathscr{Z}(f_n)' \cap \Omega = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathscr{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$ y para cada $a \in \mathscr{Z}(f)$, $\{n \in \mathbb{N} : f_n(a) = 0\}$ es finito y

$$m(f, a) = \sum_n m(f_n, a).$$

18/Octubre/2006: Teorema de Weierstrass

Lema (Weierstrass)

Definamos

$$E_0(z) = 1 - z;$$

$$E_n(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}}, n \geq 1.$$

Entonces, para $|z| \leq 1$ se tiene

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}.$$

18/Octubre/2006: Teorema de Weierstrass

Lema (Weierstrass)

Definamos

$$E_0(z) = 1 - z;$$

$$E_n(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}}, n \geq 1.$$

Entonces, para $|z| \leq 1$ se tiene

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}.$$

Definición

A las funciones E_n, $n = 0, 1, \ldots,$ del lema anterior se les llama *factores elementales de Weierstrass.*

Teorema de Weierstrass

Teorema Weierstrass-1

Sea a_k una sucesión de números complejos tal que $a_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $|a_k| \to +\infty$. Sea $n_k \in \mathbb{N}$ una sucesión tal que $\sum_{k=1}^{\infty}(R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ para cada $R > 0$ (p.e. $n_k = k-1$). Entonces el producto infinito

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(\frac{z}{a_k})$$

define una función entera $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, tal que cada a_k es un cero de f, y f no tiene otros ceros. Más precisamente, si $a \in \mathbb{C}$ aparece m veces en la sucesión a_k entonces a es un cero de f de multiplicidad m.

Teorema de Weierstrass

Observación

- Los n_k pueden tomarse cualesquiera con tal de que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ para cada $R > 0$.

Teorema de Weierstrass

Observación

- Los n_k pueden tomarse cualesquiera con tal de que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ para cada $R > 0$.
- En una situación concreta si queremos para (a_n) producir una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con $f(a_n) = 0$ y $m(a_n, f) = m_n$, $n \in \mathbb{N}$, lo que hacemos es fabricar la sucesión

$$a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \cdots = z_1, z_2, \ldots,$$

donde cada a_i se repite m_i veces y utilizar el Teorema anterior con z_n.

Teorema de Weierstrass

Observación

- Los n_k pueden tomarse cualesquiera con tal de que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ para cada $R > 0$.
- En una situación concreta si queremos para (a_n) producir una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con $f(a_n) = 0$ y $m(a_n, f) = m_n$, $n \in \mathbb{N}$, lo que hacemos es fabricar la sucesión

$$a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \cdots = z_1, z_2, \ldots,$$

donde cada a_i se repite m_i veces y utilizar el Teorema anterior con z_n.
- En la situación anterior si (m_n) está acotada y $\sum_n \frac{1}{|a_n|^p} < \infty$, es suficiente tomar $n_k = p - 1$.

Teorema de Weierstrass

Teorema Weierstrass-2

Sea $M \subset \mathbb{C}$ tal que $M' = \emptyset$. Si para cada $a \in M$ le asignamos un natural $m(a) \in \mathbb{N}$, entonces existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y cada $a \in \mathscr{Z}(f)$ tiene multiplicidad $m(a)$.

Teorema de Weierstrass

Teorema Weierstrass-2

Sea $M \subset \mathbb{C}$ tal que $M' = \emptyset$. Si para cada $a \in M$ le asignamos un natural $m(a) \in \mathbb{N}$, entonces existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y cada $a \in \mathscr{Z}(f)$ tiene multiplicidad $m(a)$.

Teorema Factorización Weierstrass

Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

la sucesión de sus ceros no nulos, repetidos según multiplicidades. Si $m_0 = 0, 1, \ldots$ es la multiplicidad de 0 como cero de f, entonces existe una sucesión $n_k \in \mathbb{N}$ y una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z) = z^{m_0} e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right).$$

19/Octubre/2006: Factorizaciones concretas

Ejercicio

Pruébese que

$$\sin \pi z = ze^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}), \text{ donde } g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

19/Octubre/2006: Factorizaciones concretas

Ejercicio

Pruébese que

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}), \text{ donde } g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

Proposición

Sea $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión tal que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos y tal que $\mathscr{Z}(f_n)' \cap \Omega = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie de funciones meromorfas $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n'/f_n)$ converge unif. sobre compactos y $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$

19/Octubre/2006: Factorizaciones concretas

Ejercicio

Pruébese que

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}), \text{ donde } g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

Proposición

Sea $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión tal que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos y tal que $\mathscr{Z}(f_n)' \cap \Omega = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie de funciones meromorfas $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n'/f_n)$ converge unif. sobre compactos y $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$

Ejercicio-continuación

Pruébese que

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

Proposición

Si $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ entonces existen $g, h \in \mathscr{H}(\Omega)$ tales que $f = g/h$

Proposición

Si $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ entonces existen $g, h \in \mathscr{H}(\Omega)$ tales que $f = g/h$

Ejercicio

Si $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\alpha_k|) < +\infty$, $\alpha_n \in D(0,1)$, entonces el producto infinito

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}\right),$$

converge uniformemente sobre compactos en $D(0,1)$ donde define una función acotada $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ cuyos ceros son $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio

Ejercicio

- Demostrar que existe una función holomorfa en el disco unidad $D(0,1)$ que no se puede prolongar analíticamente fuera.
- Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto discreto y para cada $a \in M$ sea $m(a) \in \mathbb{N}$ y $w_{j,a} \in \mathbb{C}$ para $1 \leq j \leq m(a)$. Pruébese que existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $Z(f) = M$ y para cada $a \in M$,

$$\frac{1}{j!} f^{(j)}(a) = w_{j,a} \text{ para } 1 \leq j \leq m(a).$$